

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ HOÀNG LINH

BÀI TOÁN TÔ MÀU
ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2015

MỞ ĐẦU

Đồ thị là một cấu trúc toán học rời rạc, bao gồm hai yếu tố *đỉnh* và *cạnh*, và là mô hình toán học cho nhiều vấn đề lý thuyết và thực tiễn đa dạng. Bài toán tô màu cho các đỉnh (hay các cạnh) của một đồ thị là một chủ đề quan trọng và hấp dẫn của lý thuyết đồ thị. Bài toán này có những ứng dụng thiết thực trong kinh tế, kỹ thuật và đời sống. Chẳng hạn, ta thường gặp bài toán tô màu bản đồ, tô màu cho dây dẫn điện. Một số vấn đề không liên quan đến tô màu cũng có thể được xử lý nhờ bài toán tô màu: bố trí kho chứa hóa chất, thiết kế các bảng vi mạch điện tử, sắp xếp lịch hội thi, bố trí các trạm truyền tin, xác lập các tuyến xe buýt thành phố, v.v ...

Lý thuyết đồ thị ra đời và phát triển gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà toán học nổi tiếng: Euler (Thụy sĩ), với bài toán về 7 cầu ở thành phố Königsberg, König và Egeváry (Hungari), với phương pháp Hungari giải bài toán phân việc.

Về vấn đề tô màu đồ thị có nhiều kết quả lý thuyết đáng chú ý: Định lý Brooks, Minty về tô màu đỉnh; Định lý König, Vizing, Shannon về tô màu cạnh, định lý 5 màu của Heawood (1890) và Định lý 4 màu của Appel và Haken (1976), đã giải quyết được giả thuyết 4 màu nổi tiếng do Guthrie nêu ra lần đầu năm 1852.

"**Bài toán tô màu đồ thị và ứng dụng**".

Luận văn này có mục đích tìm hiểu và trình bày các khái niệm cơ bản về đồ thị và các dạng đồ thị thường gặp, về bài toán tô màu trên đồ thị (tô đỉnh, tô cạnh và tô diện - tô màu bản đồ) và một số ứng dụng của các bài toán này. Trình bày các kết quả lý thuyết, các định lý về tô màu trên các loại đồ thị khác nhau và các thuật toán tô màu đỉnh và cạnh, dựa trên các kết quả lý thuyết đã có.

Nội dung luận văn được viết trong hai chương.

Chương 1 "Khái niệm cơ bản về đồ thị" nhắc lại các khái niệm cơ bản về đồ thị: đỉnh, cạnh, bậc của đỉnh, đồ thị vô hướng và đồ thị có hướng, đường đi và chu trình, đồ thị liên thông, không liên thông, các phép toán trên đồ thị. Miêu tả nhiều dạng đồ thị đặc biệt: rừng và cây, đồ thị hình sao, đồ thị vòng, đồ thị đường, đồ thị bánh xe, đồ thị đầy đủ, đồ thị hai phần, đồ thị hai phần đầy đủ, đồ thị đều (chính qui), đồ thị Petersen, đồ thị Platon, đồ thị phẳng, ...

Chương 2 "Bài toán tô màu đồ thị" đề cập tới vấn đề tô màu các đỉnh, cạnh và diện của một đồ thị. Trình bày các kết quả về tô màu đỉnh: định lý Brooks (1941), định lý Minty (1962), các định lý tô màu đồ thị phẳng, đặc biệt định lý bốn màu (Appel và Haken, 1976). Về tô màu bản đồ (tô diện của đồ thị phẳng) có các định lý về bản đồ 2 màu, bản đồ lập phương 3 màu và định lý bốn màu cho bản đồ. Về tô màu cạnh của đồ thị: trình bày định lý Vizing (1964) về số màu tối thiểu cần tô, định lý tô cạnh đồ thị đầy đủ, tô cạnh đồ thị hai phần (Định lý König, 1916) và quan hệ với định lý bốn màu. Cuối chương đề cập tới đa thức màu, cho biết có thể tô đỉnh của đồ thị bằng k màu được không, nếu được thì có mấy cách tô.

Nhân dịp này, tác giả luận văn xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS - TS Trần Vũ Thiệu, đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả chân thành cảm ơn các thầy giáo, cô giáo Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên 20 tháng 04 năm 2015

Tác giả

Vũ Hoàng Linh

Chương 1

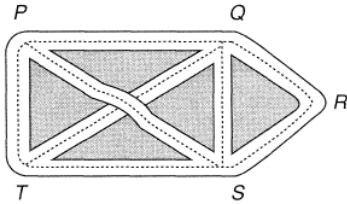
KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ

Chương này trình bày các kiến thức cơ sở về lý thuyết đồ thị. Mục 1.1 nêu các định nghĩa, khái niệm dùng trong lý thuyết đồ thị và các phép toán trên đồ thị. Mục 1.2 mô tả các dạng đồ thị thường gặp. Trong chương dẫn ra nhiều ví dụ minh họa. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [2], [3], [4] và [5].

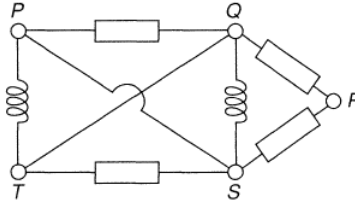
1.1. ĐỊNH NGHĨA VÀ KÝ HIỆU

1.1.1. Khái niệm đồ thị

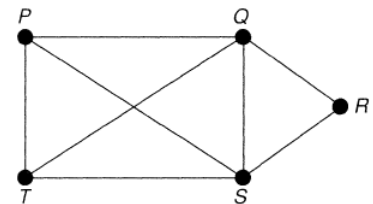
Trong thực tế ta thường gặp các sơ đồ giao thông (Hình 1.1) hay sơ đồ mạch điện (Hình 1.2). Các sơ đồ này được khái quát thành sơ đồ vẽ ở Hình 1.3. Từ đó ta đi tới định nghĩa sau.



Hình 1.1. Sơ đồ khu phố



Hình 1.2. Sơ đồ mạch điện



Hình 1.3. Đồ thị đại diện

Đồ thị (graph) là một tập hợp hữu hạn và khác rỗng các điểm, gọi là các *đỉnh* (vertex) hay *nút* (node), và một tập hợp các đường (thẳng hay cong) nối liền một số cặp điểm này, gọi là các *cạnh* (edge) của đồ thị (Số cạnh có thể bằng 0).

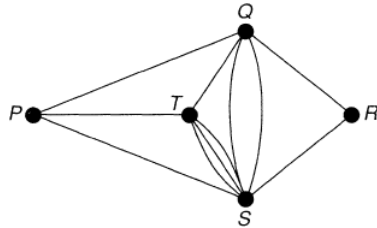
Mỗi đỉnh của đồ thị thường được ký hiệu bằng một chữ cái (a, b, c, ... hay A, B, C, ...) hoặc chữ số (1, 2, 3, ...). Cạnh nối liền đỉnh v với đỉnh w được ký hiệu là (v, w) hay đơn giản là vw (v và w có thể là các chữ số). Một cạnh có dạng (a, a), nối đỉnh a với chính nó, gọi là một *khuyên* (loop).

Nếu đồ thị G có tập đỉnh là V và tập cạnh là $E \subseteq V \times V$ thì để cho gọn, ta viết $G = (V, E)$. Ta cũng dùng ký hiệu $V(G)$ để chỉ tập đỉnh và $E(G)$ để chỉ tập cạnh của đồ thị G. Ký hiệu $n = |V(G)|$ là số đỉnh và $m = |E(G)|$ là số cạnh của đồ thị G.

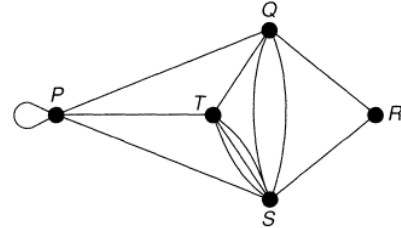
Để dễ hình dung, mỗi đồ thị thường được biểu diễn bởi một hình vẽ trên mặt phẳng. Chẳng hạn, Hình 1.3 biểu diễn một đồ thị có 5 đỉnh: P, Q, R, S, T và 8 cạnh (mỗi cạnh là một đoạn thẳng nối hai đỉnh). Chú ý rằng điểm cắt nhau của hai cạnh PS và QT trong hình vẽ không phải là một đỉnh của đồ thị.

Đỉnh v gọi là *kề* (adjacent) đỉnh w nếu có một cạnh của đồ thị nối v với w . Nếu ký hiệu cạnh này là e thì ta viết $e = (v, w)$ và nói cạnh e *liên thuộc* (incident) v , w hay v, w là hai *đầu mút* của e . Cạnh e và e' gọi là *kề nhau* nếu e, e' có chung đỉnh.

Hai cạnh e và e' cùng nối một cặp đỉnh gọi là *cạnh kép* (multiple edge). Đồ thị không có cạnh kép gọi là một *đơn đồ thị* (simple graph). Trái lại, gọi là một *đa đồ thị*. Hình 1.4 và 1.5 minh họa cạnh kép và khuyên trong đa đồ thị.



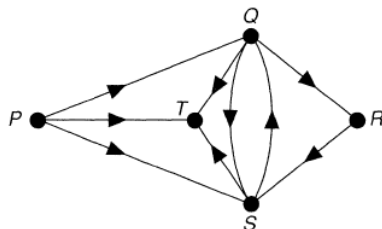
Hình 1.4. Cạnh kép và đa đồ thị



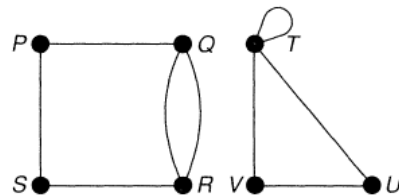
Hình 1.5. Khuyên trong đa đồ thị

Một cạnh của đồ thị gọi là *cạnh có hướng* (directed edge) nếu có qui định rõ một đầu mút của cạnh là *đỉnh đầu*, mút kia là *đỉnh cuối*. Cạnh có hướng còn được gọi là một *cung*.

Một đồ thị gồm toàn các cạnh gọi là *đồ thị vô hướng* (undirected graph), đồ thị gồm toàn các cung gọi là *đồ thị có hướng* (digraph). Một đồ thị vừa có cạnh vừa có cung gọi là *đồ thị hỗn hợp* (mixed graph). Bằng cách thay một cạnh bởi hai cung có hướng ngược chiều nhau, ta có thể qui mọi đồ thị về đồ thị có hướng. Hình 1.6 mô tả một đồ thị có hướng.



Hình 1.6. Đồ thị có hướng



Hình 1.7. Đồ thị không liên thông

Bậc (degree) của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc nó, ký hiệu là $\rho(v)$. Đỉnh có bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập* (isolated vertex), đỉnh có bậc 1 gọi là *đỉnh treo* (end-vertex), Tương tự, trong đồ thị có hướng ta gọi bậc ra (*bậc vào*) của đỉnh v là số cung đi khỏi v (số cung đi tới v), ký hiệu tương ứng là $\rho^+(v)$ và $\rho^-(v)$. Qui ước: khuyên tại một đỉnh được tính 2 lần. Ví dụ trong đồ thị vẽ ở Hình 1.7 ta có $\rho(P) = \rho(S) = \rho(U) = \rho(V) = 2$; $\rho(Q) = \rho(R) = 3$ và $\rho(T) = 4$ (có khuyên ở T).

Dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây về bậc của đỉnh trong đồ thị:

a) Trong một đồ thị vô hướng, tổng số bậc của mọi đỉnh bằng hai lần số cạnh của đồ thị và số đỉnh có bậc lẻ bao giờ cũng là một số chẵn.

b) Trong một đồ thị có hướng, tổng các bậc vào của mọi đỉnh bằng tổng các bậc ra của mọi đỉnh và bằng tổng số cung trong đồ thị. $\square$

Nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng các cung trong đồ thị. Vì thế, khi bỏ qua hướng trên các cung (đổi cung thành cạnh) ta sẽ nhận được một đồ thị vô hướng, gọi là *đồ thị nền* của đồ thị có hướng đã cho.

1.1.2. Phép toán trên đồ thị

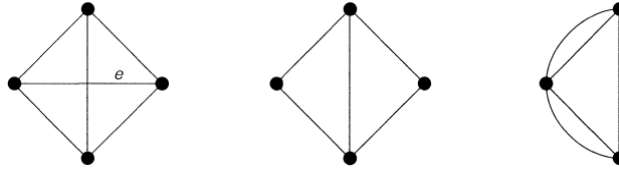
Sau đây ta tập trung chủ yếu xét các đồ thị vô hướng và một số phép toán.

- *Đồ thị con* (subgraph) của một đồ thị G là đồ thị nhận được từ G bằng cách bỏ đi một số đỉnh và một số cạnh của nó. Nói chính xác, $H = (V(H), E(H))$ là một đồ thị con của G nếu $V(H) \subseteq V(G)$ và $E(H) \subseteq E(G)$. Ta cũng nói G chứa H . H gọi là *đồ thị con cảm sinh* (induced subgraph) của G nếu H là một đồ thị con của G và $E(H) = \{(x, y) \in E(G) : x, y \in V(H)\}$. Ở đây H là đồ thị con của G sinh bởi $V(H)$. Vì thế ta còn viết $H = G[V(H)]$. Đồ thị con H của G gọi là *đồ thị con bao trùm* nếu $V(H) = V(G)$, tức tập đỉnh của H và của G trùng nhau.

- Với $v \in V(G)$, ký hiệu $G - v$ là đồ thị con của G cảm sinh bởi $V(G) \setminus \{v\}$, tức đồ thị nhận được từ G bằng cách bỏ đỉnh v và các cạnh liên thuộc v .

- Với $e \in E(G)$, ta định nghĩa $G - e := (V(G), E(G) \setminus \{e\})$, tức đồ thị nhận được từ G bằng cách xóa cạnh e (không xóa hai đầu mút của e). Ta cũng định nghĩa

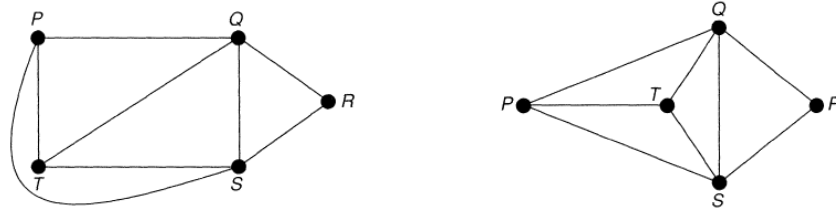
$G \setminus e$ là đồ thị nhận được bằng cách co cạnh e thành một điểm duy nhất. Hình 1.8 minh họa các đồ thị G , $G - e$ và $G \setminus e$.



Hình 1.8. Đồ thị G , cạnh e và các đồ thị $G - e$ và $G \setminus e$ tương ứng

1.1.3. Đồ thị đẳng cấu

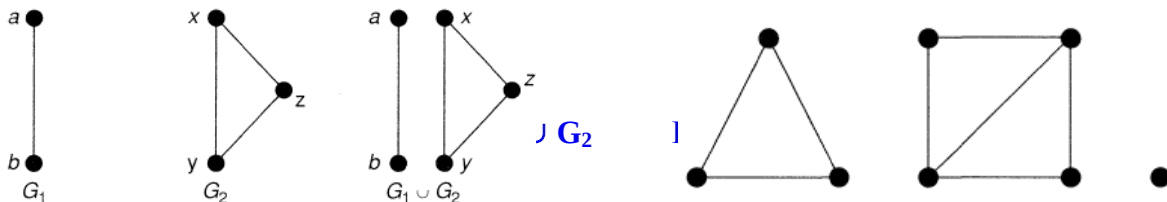
Hai đồ thị G_1 và G_2 gọi là *đẳng cấu* (isomorphic) nếu chúng có số đỉnh và số cạnh như nhau và có phép tương ứng một - một giữa tập đỉnh của G_1 và G_2 sao cho hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh trong đồ thị này khi và chỉ khi hai đỉnh tương ứng trong đồ thị kia cũng được nối với nhau bởi một cạnh và ngược lại. Hình 1.9 vẽ các đồ thị đẳng cấu với đồ thị vẽ ở Hình 1.3. Các cạnh của hai đồ thị ở Hình 1.9 chỉ gặp nhau ở đỉnh. Các đồ thị đẳng cấu được xem là *tương đương* (là một).



Hình 1.9. Các đồ thị đẳng cấu với đồ thị ở Hình 1.3

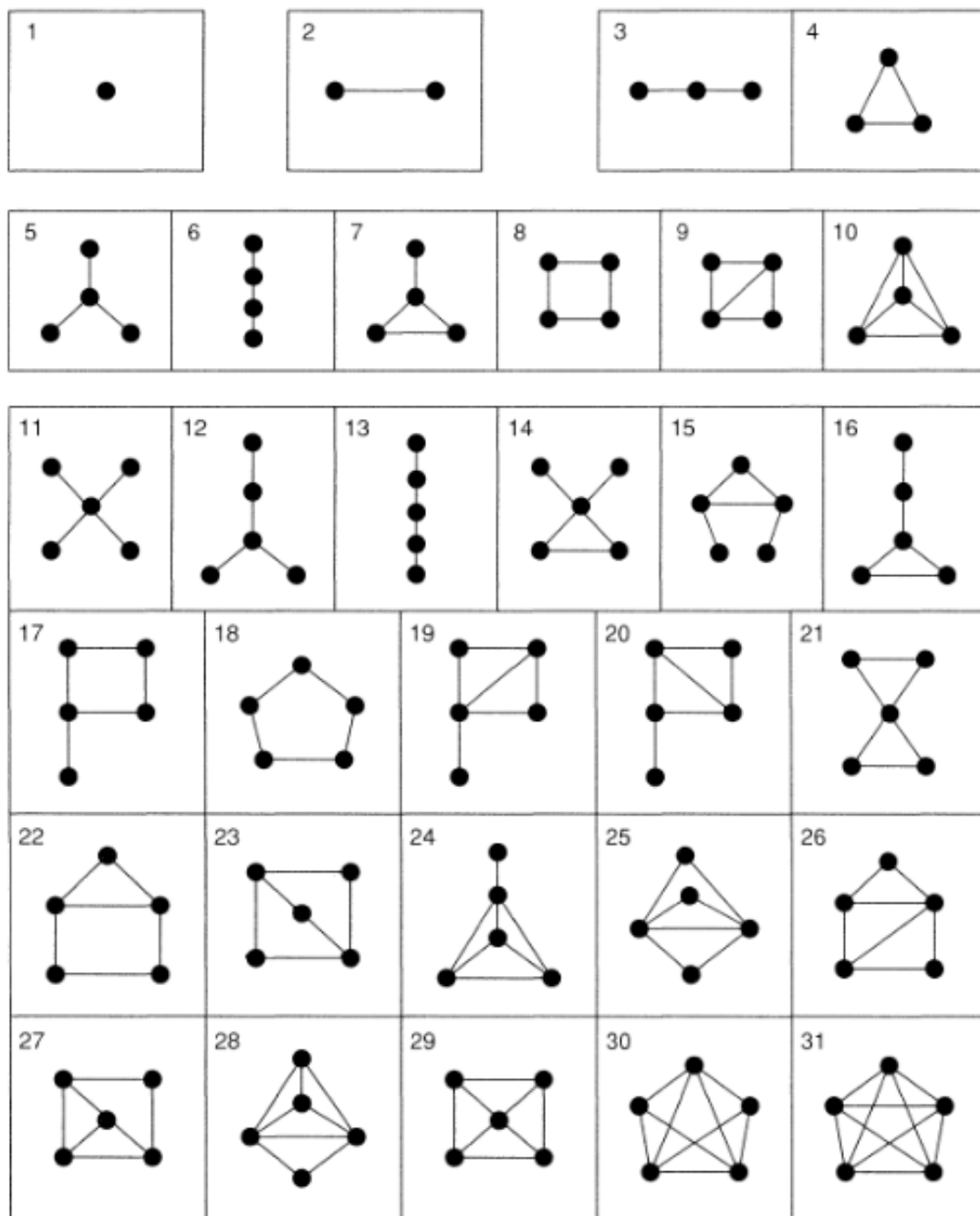
1.1.4. Đồ thị liên thông

Có thể ghép hai đồ thị để lập lên một đồ thị lớn hơn. Cho $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$, $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ với $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Khi đó, *hợp* (union) $G_1 \cup G_2$ là đồ thị có tập đỉnh là $V(G_1) \cup V(G_2)$ và tập cạnh là $E(G_1) \cup E(G_2)$ (Hình 1.10).



Hầu hết các đồ thị thường gặp là đồ thị ghép. Một đồ thị được gọi là *liên thông* (connected graph) nếu nó không biểu diễn được dưới dạng hợp của hai hay nhiều

đồ thị. Trái lại, đồ thị gọi là *không liên thông* (disconnected graph). Rõ ràng là bất cứ một đồ thị không liên thông G nào cũng biểu diễn được dưới dạng hợp của các đồ thị liên thông, mỗi đồ thị liên thông gọi là một thành phần liên thông của G . Chẳng hạn, một đồ thị gồm ba thành phần liên thông được vẽ ở Hình 1.11.



Hình 1.12. Các kiểu đồ thị liên thông không quá 5 đỉnh

Khi cần chứng minh một kết luận nào đó cho các đồ thị nói chung, ta thường chứng minh kết quả tương ứng cho các đồ thị liên thông, sau đó áp dụng kết quả thu được cho từng thành phần liên thông riêng lẻ của đồ thị. Một bảng gồm tất cả các đồ thị liên thông (không ghi tên đỉnh) có tối đa 5 đỉnh được vẽ ở Hình 1.12.

1.1.5. Đường và chu trình trong đồ thị vô hướng

Đường (path) P từ đỉnh v tới đỉnh w là một dãy liên tiếp các cạnh có dạng:

$$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{k-1}, a_k) \text{ với } (a_{i-1}, a_i) \in E(G), a_0 = v, a_k = w \text{ và } k \geq 1,$$

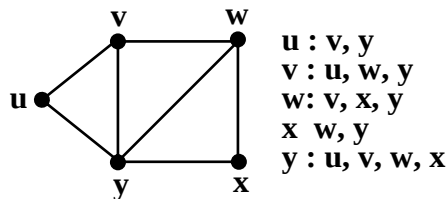
trong đó các đỉnh $a_0, a_1, \dots, a_k$ đều khác nhau. Để đơn giản, đôi khi ta viết $P = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ và nói đó là đường nối đỉnh v và đỉnh w . Đỉnh v gọi là *đỉnh đầu*, đỉnh w gọi là *đỉnh cuối* của đường P . Một đường nối một đỉnh với chính nó (đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối) gọi là một *chu trình* (cycle). *Độ dài* (length) của đường (chu trình) là số cạnh của đường (chu trình) đó.

Ví dụ với đồ thị vẽ ở Hình 1.9 một đường nối đỉnh P và đỉnh R là $(P, T), (T, Q), (Q, R)$ hay đơn giản là P, T, Q, R . Hai đường khác từ P tới R là P, T, S, R và P, Q, R hay P, S, R . Đồ thị này có các chu trình sau:

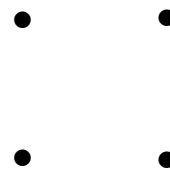
$$(P, Q), (Q, R), (R, S), (S, T), (T, P); (Q, S), (S, T), (T, Q), \text{ v.v ...}$$

1.1.6. Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

Mặc dù cách biểu diễn đồ thị bằng hình vẽ gồm các điểm được nối với nhau bởi các cạnh khá thuận tiện, song cách này không còn phù hợp nếu ta muốn lưu giữ một đồ thị cỡ lớn trên máy tính. Có cách lưu giữ một đơn đồ thị là liệt kê các đỉnh kề với mỗi đỉnh của đồ thị. Ví dụ cho cách biểu diễn này được chỉ ra ở Hình 1.13.



Hình 1.13. Liệt kê các đỉnh kề



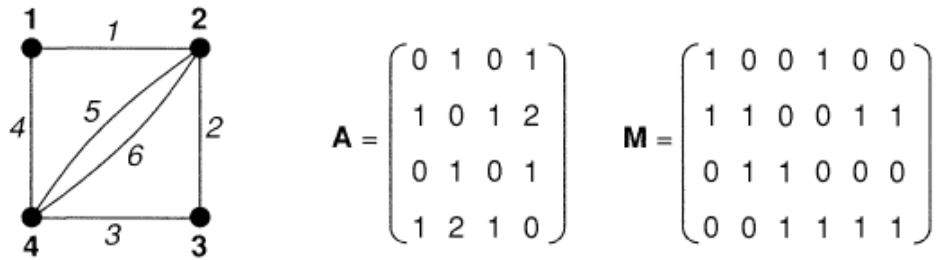
Hình 1.14. Đồ thị rỗng N_4

Một cách biểu diễn hữu ích khác là dùng các ma trận.

• **Ma trận kề:** Nếu G là một đồ thị với các đỉnh được đánh số $1, 2, \dots, n$, thì *ma trận kề* (adjacency matrix) của G là ma trận vuông A cấp n , phần tử ở hàng i cột j của A bằng số cạnh nối đỉnh i và đỉnh j của đồ thị.

• **Ma trận liên thuộc:** Nếu các cạnh của đồ thị cũng được đánh số $1, 2, \dots, m$, thì *ma trận liên thuộc* (incidence matrix) của G là ma trận chữ nhật M cấp $n \times m$, phần tử ở hàng i cột j của M bằng 1 nếu đỉnh i kề cạnh j và bằng 0 nếu trái lại.

Hình 1.15 vẽ đồ thị G cùng với ma trận kề và ma trận liên thuộc của nó.



Hình 1.15. Ma trận kề và ma trận liên thuộc

1.2. MỘT SỐ DẠNG ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Mục này trình bày một số dạng đồ thị đặc biệt, đáng chú ý và hay được dùng trong lý thuyết đồ thị và trong các ứng dụng.

1.2.1 Đồ thị rỗng (Đồ thị không)

Một đồ thị có đỉnh, nhưng không có cạnh nào (tập cạnh rỗng) gọi là một *đồ thị rỗng* (empty graph) hay *đồ thị không* (null graph). Ký hiệu đồ thị rỗng n đỉnh là N_n . Mỗi đỉnh của một đồ thị rỗng là một đỉnh cô lập (đỉnh bậc 0) và các đồ thị rỗng rất ít được chú ý. Một đồ thị rỗng N_4 được vẽ ở Hình 1.14.

1.2.2. Rừng và cây

Có thể hiểu đồ thị liên thông theo nghĩa tương đương như sau. Một đồ thị vô hướng gọi là *liên thông* nếu có đường đi nối hai đỉnh bất kỳ của đồ thị. Trái lại, đồ thị gọi là *không liên thông*. Đồ thị không liên thông sẽ bị tách thành một số đồ thị con liên thông, đôi một không có đỉnh chung. Mỗi đồ thị con liên thông như thế là một *thành phần liên thông*. Cạnh e gọi là một *cầu* (bridge) nếu xóa e (không xóa